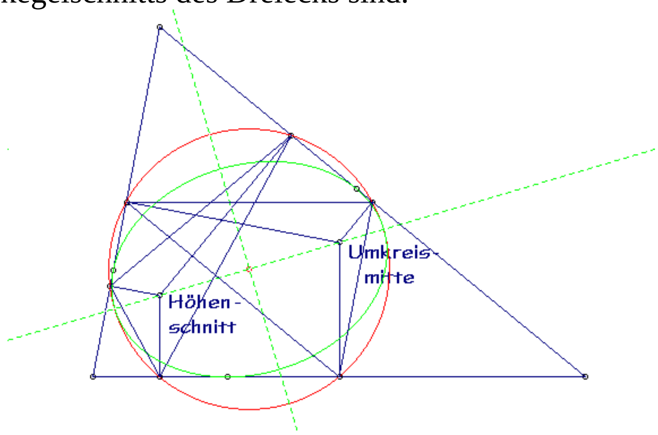
**Fußpunktdreiecke und Fußpunktvierecke**

Eckart Schmidt

## Vorbemerkungen

Lotet man von einem Punkt *P* der Dreiecksebene auf die Seitengeraden, so erhält man die Ecken des Fußpunktdreiecks von *P*. Einfachstes Beispiel ist das Seitenmittendreieck als Fußpunktdreieck der Umkreismitte, gleichzeitig Ceva-Dreieck des Schwerpunktes. Geometrisch interessanter ist das Höhenfußpunktdreieck [1], ebenfalls Ceva-Dreieck. Aber nicht jedes Fußpunktdreieck ist Ceva-Dreieck.

Die Fußpunktdreiecke von Umkreismitte und Höhenschnitt haben den gleichen Umkreis, den Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks. Hintergrund ist die isogonale Konjugiertheit der beiden Punkte, die daher auch Brennpunkte eines Berührkegelschnitts des Dreiecks sind.




Weiterhin stellt sich die Frage nach Entartungen des Fußpunktdreiecks. Für welche Punkte entartet das Fußpunktdreieck kollinear oder gleichseitig oder als Ceva-Dreieck? So liegen bekanntlich die Fußpunkte von Umkreispunkten auf der Simson-Geraden.

Entsprechende Fragestellungen lassen sich beim Fußpunktviereck untersuchen. Die Bearbeitung erfolgt analytisch mit baryzentrischen Koordinaten. Ausgangspunkt dieser Ausarbeitung war ein Briefwechsel mit Herrn Bubeck [2] über Spiegeldreiecke und Spiegelvierecke.

## Fußpunktdreiecke isogonal-konjugierter Punkte

Ausgehend von einem Bezugsdreieck *ABC* seien die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes *P* der Dreiecksebene *x*, *y*, *z*. Dann sind die Fußpunkte der Lote auf die Seiten:

$$A'(0 : a^2y + S_cx : a^2z + S_bx)\,,\ B'(b^2x + S_cy : 0 : b^2z + S_ay)\,,$$

$$C'(c^2x + S_bz : c^2y + S_az : 0)\,.$$

Für den isogonal-konjugierten Partner von *P*

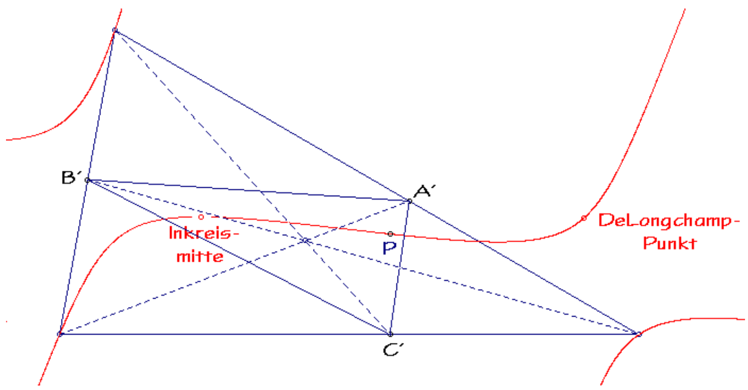
$$P*(a^2yz : b^2zx : c^2xy)$$

ergeben sich die Lotfußpunkte

$$A''(0:(b^2x+S_cy)z:(c^2x+S_bz)y)\,,$$
$$B''((a^2y+S_cx)z:0:(c^2y+S_az)x)\,,$$
$$C''((a^2z+S_bx)y:(b^2z+S_ay)x:0)\,.$$
Benutzt werden die Conway-Bezeichnungen
$$2S_A=-a^2+b^2+c^2\,,\ \ldots\ \text{mit}\ S=2\Delta\,.$$
Alle sechs Fußpunkte haben vom Mittelpunkt der Strecke *PP** den gleichen Abstand. Ein synthetischer Beweis findet sich in [3].
Eine weitergehende Eigenschaft isogonal-konjugierter Punkte ist die Brennpunkteigenschaft für einen Berührkegelschnitt des Dreiseits [4]. Der gemeinsame Umkreis der Fußpunktdreiecke isogonal-konjugierter Punkte ist dann der Hauptkreis des Kegelschnitts.

**Fußpunktdreiecke und Ceva-Dreiecke**

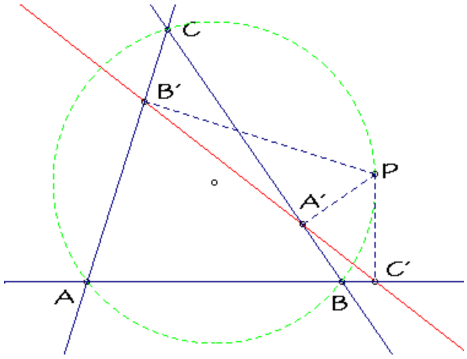
Das Fußpunktdreieck eines Punktes *P* muss nicht Ceva-Dreieck eines Punktes *Q* sein. Für den Höhenschnitt stimmen diese beiden Dreiecke zwar überein und die Fußpunktdreiecke der Umkreismitte und der Inkreismitte sind auch Ceva-Dreiecke, aber das Fußpunktdreieck des Schwerpunktes muss kein Ceva-Dreieck sein. Alle Punkte, deren Fußpunktdreieck auch Ceva-Dreieck ist, liegen auf der sogenannten Darboux-Cubic mit der Gleichung [5]
$$\sum_{zyklisch}(S^2-2S_BS_C)x(c^2y^2-b^2z^2)=0\,,$$
einer isogonal-invarianten kubischen Kurve mit dem Pivot-Punkt im sogenannten DeLongchamps-Punkt X(20) [6].



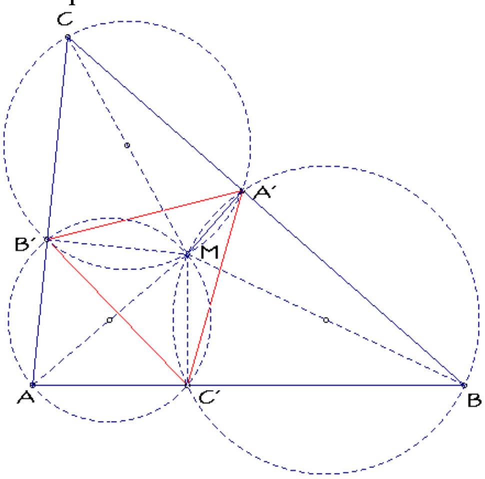

Die zugehörigen Ceva-Punkte liegen auf der Lucas-Cubic mit der Gleichung [5]
$$\sum_{zyklisch}S_Ax(y^2-z^2)=0,$$
einer isotom-invarianten kubischen Kurve mit dem Pivot-Punkt X(69) (isotomes Bild des Höhenschnitts).

**Entartete Fußpunktdreiecke**

Für Umkreispunkte entartet das Fußpunktdreieck bekanntlich kollinear; die Fußpunkte der Lote von einem Umkreispunkt auf die Dreiecksseiten liegen auf der Simson-Geraden [7]. Diametrale Punkte des Umkreises haben orthogonale Simson-Geraden, die sich auf dem Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks schneiden.




Interessanter ist die Frage nach gleichseitigen Fußpunktdreiecken. Hierzu sei der Miquel-Punkt *M* eines einbeschriebenen Dreiecks *A´B´C´* angesprochen, der gemeinsame Schnittpunkt der Kreise *k(A´,B´,C), k(A´,B,C´)* und *k(A,B´,C´).* Alle einbeschriebenen Dreiecke mit gleichem Miquel-Punkt sind ähnlich und ähnliche einbeschriebene Dreiecke gleichen Umlaufsinns haben denselben Miquel-Punkt. Weiterhin schneiden die Geraden *MA´, MB´, MC´* die Seitengeraden unter dem gleichen Winkel [1]. Damit gibt es unter den einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecken gleichen Umlaufsinns genau ein Fußpunktdreieck, das Fußpunktdreieck des zugehörigen Miquel-Punktes.




In den Kreisvierecken *A´MB´C* und *B´MC´A* gilt

$$A'B' = CM \cdot \sin\gamma \text{ und } B'C' = AM \cdot \sin\alpha,$$

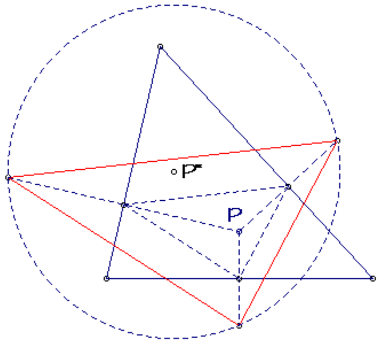
$$\text{d.h.}\quad \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{CM}{AM}\frac{c}{a} = 1 \quad \text{und somit} \quad \frac{CM}{AM} = \frac{a}{c}.$$

Daher muss *M* auf dem Apollonius-Kreis über der Seite *AC* liegen und entsprechend auf den Apollonius-Kreisen über *BC* und *CA*. Die gemeinsamen Schnittpunkte der Apollonius-Kreise sind die isodynamischen Zentren X(15) und X(16), die isogonal-konjugierten Bilder der Fermat-Punkte.

Eine Konstruktion dieser gleichseitigen Fußpunktdreiecke ergibt sich unmittelbar aus der Miquel-Konfiguration.

**Spiegeldreiecke**

Spiegelt man einen Punkt $P$ der Dreiecksebene an den Seitengeraden des Dreiecks, so erhält man das Spiegeldreieck des Punktes $P$. Es entsteht aus dem Fußpunktdreieck durch eine zentrische Streckung mit dem Faktor zwei. Der isogonal-konjugierte Partner von $P$ ist der Mittelpunkt des Umkreises des Spiegeldreiecks. Bubeck stellt in [2] die Frage nach der Perspektivität der Spiegeldreiecke.




Aus den Eckpunkten des Spiegeldreiecks

$$S_a(-a^2x : 2S_Cx + a^2y : 2S_Bx + a^2z),$$
$$S_b(2S_Cy + b^2x : -b^2y : 2S_Ay + b^2z),$$
$$S_c(2S_Bz + c^2x : 2S_Az + c^2y : -c^2z)$$

ergeben sich die Ecktransversalen zu

$$AS_a(0 : -2S_Bx - a^2z : 2S_Cx + a^2y)$$
$$BS_b(2S_Ay + b^2z : 0 : -2S_Cy - b^2x)$$
$$CS_c(-2S_Az - c^2y : 2S_Bz + c^2x : 0).$$

Auf Grund der geforderten Perspektivität müssen diese drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Dies ist der Fall, wenn die Determinante der Geradenkoordinaten den Wert Null hat. Eine Auswertung dieser Determinante ergibt die Gleichung:

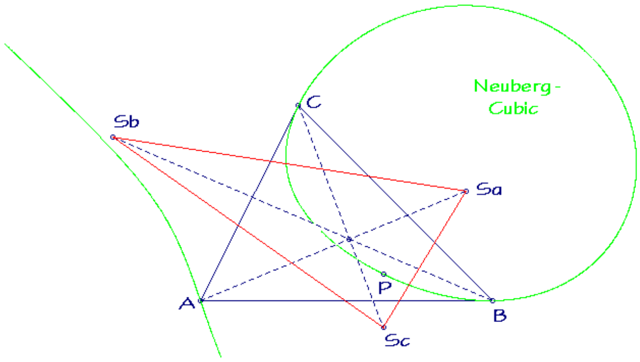
$$\begin{aligned} &x(c^2y^2 - b^2z^2)(S^2 - 3S_BS_C) \\ &+ y(a^2z^2 - c^2x^2)(S^2 - 3S_AS_C) \\ &+ z(b^2x^2 - a^2y^2)(S^2 - 3S_AS_B) = 0 \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung der bekannten Neuberg-Cubic [5], einer isogonal-invarianten Zirkularkurve mit dem Fernpunkt der Euler-Geraden als Pivot-Punkt. Punkte der Neuberg-Cubic sind z.B. die In- und Ankreismitten, der Höhenschnitt, die Umkreismitte, die Fermat-Punkte und die isodynamischen Zentren. Dabei sind z.B. die Fermat-Punkte die Perspektivitätszentren der gleichseitigen Spiegeldreiecke der isodynamischen Zentren.

Die Perspektivitätszentren

$$Z((a^2y^2 - b^2x^2)(a^2z^2 - c^2x^2)(b^2S_Bz - c^2S_Cy) : \ldots \quad )$$

der Spiegeldreiecke zu Punkten der Neuberg-Cubic liegen auf einer weiteren Zirkularkurve, die man aus der Neuberg-Cubic




durch Spiegelung am Umkreis mit anschließender isogonal-konjugierter Abbildung erhält. Sie hat die Gleichung ([5], S. 40)

$$\sum_{zykl.} x^2(S_B y - S_C z)(S^2 - 3S_A{}^2) = 0\,,$$

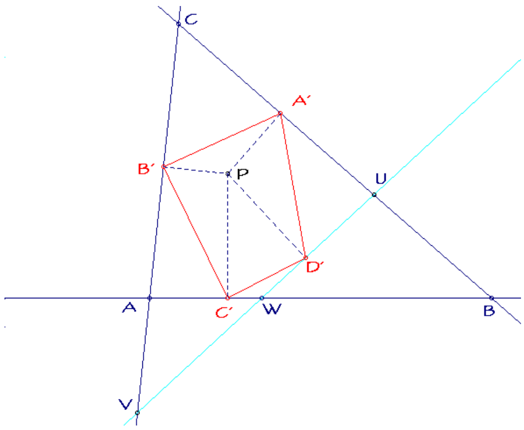
ist invariant unter der Konjugation, die die beiden Fermat-Punkte vertauscht und hat den Pivot-Punkt X(265) (isogonal-konjugiertes Bild der Spiegelung von *H* am Umkreis).

**Fußpunktvierecke**

Nimmt man zu den Seitengeraden $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ eines Bezugsdreiecks *ABC* eine weitere Gerade *d* hinzu, so erhält man ein Vierseit. Die vierte Gerade sei als Tripolare eines Punktes $Q(u:v:w)$ beschrieben, die die Seitengeraden von *ABC* in den Punkten

$$U(0:v:-w)\,,\ V(u:0:-w)\,,\ W(u:-v:0)$$

schneidet. Die Geraden *a*, *b*, *c*, *d* sind Seitengeraden des Vierecks *UCAW*. Die Unsymmetrie in der Beschreibung ergibt sich daraus, dass ein Vierseit in baryzentrischen Koordinaten bezüglich eines Teildreiseits beschrieben wird.



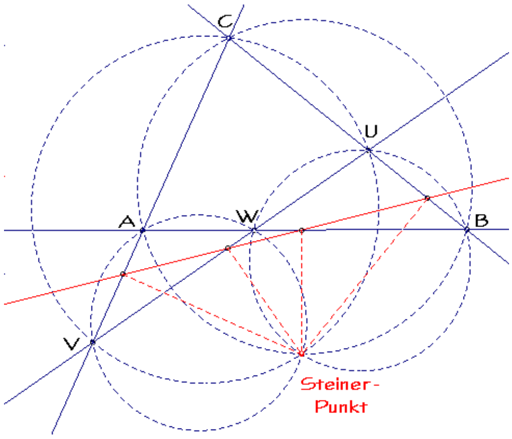

Fällt man von einem Punkt $P(x:y:z)$ die Lote auf die Geraden *a*, *b*, *c*, *d*, so erhält man das Fußpunktviereck *A´B´C´D´*. Neu sind nur die - leider sehr unbequemen - baryzentrischen Koordinaten von *D´*:

$$D'(S_A u(v-w)^2 x$$

$$+ S_B v(u-w)(vx+wy+vz) + S_C w(u-v)(wx+wy+vz) : \ldots)$$

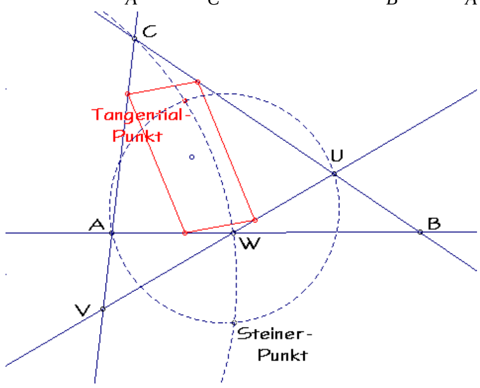
Damit das Fußpunktviereck kollinear entartet, muss der Punkt *P* auf allen vier Umkreisen der Teildreiseite liegen. Dieser Punkt ist bekanntlich der Steiner-Punkt $F$ des Vierseits, auch als Miquel- oder Clifford-Punkt angesprochen [8]:

$$F\left(\frac{a^2}{v-w}:\frac{b^2}{w-u}:\frac{c^2}{u-v}\right)$$




Die gemeinsame Simson-Gerade des Steiner-Punktes bzgl. der vier Dreiseite hat dann die Gleichung:

$$\frac{v-w}{S_C v+S_B w-a^2 u}x+\frac{w-u}{S_A w+S_C u-b^2 v}y+\frac{u-v}{S_B u+S_A v-c^2 w}z=0$$




Bei Stärck [9] findet sich in einem Beitrag über den sogenannten Tangentialpunkt eines Vierecks der Hinweis, dass für diesen Punkt das Fußpunktdreieck punktsymmetrisch, d.h. zu einem Parallelogramm entartet. Diesen geometrisch interessanten Viereckspunkt findet man konstruktiv z.B. im zweiten Schnitt der Kreise durch den Steiner-Punkt und ein Gegeneckenpaar des Vierecks. Da es bei einem Parallelogramm auf die Reihenfolge der Punkte ankommt, hat der Tangentialpunkt in der hier gewählten koordinatenmäßigen Beschreibung eine sehr unübersichtliche Darstellung:

$$T(a^2w[(v-2u)\lambda+S_Bv^2(w-u)]:b^2uw[\lambda-S_Bv(u-2v+w)]$$
$$:c^2u[(v-2w)\lambda+S_Bv^2(u-w)])$$
$$\text{mit } \lambda=S_Au(v-w)+S_Cw(v-u).$$

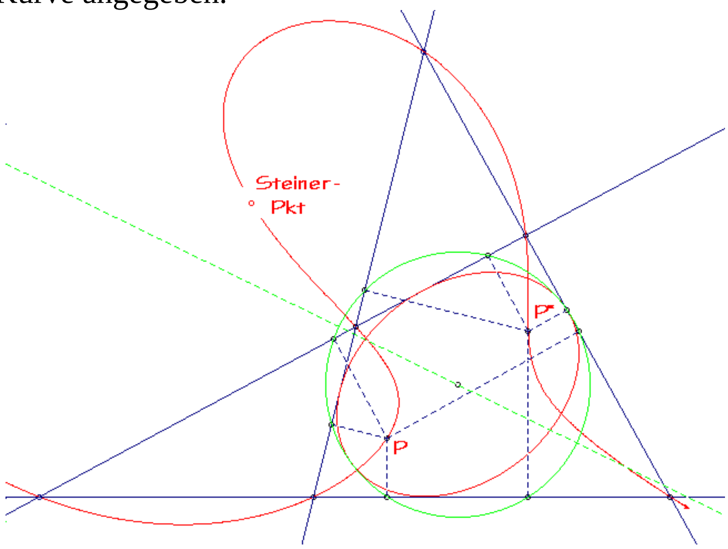
Das Fußpunktviereck des Tangentialpunktes ist ein Quadrat, wenn das Viereck UCAW orthogonale Diagonalen hat.

**Fußpunktvierecke mit Umkreis**

Abschließend sei der Frage nachgegangen, für welche Punkte *P* die Fußpunkte *A´*, *B´*, *C´*, *D´* der Lote auf vier Geraden *a*, *b*, *c*, *d* konzyklisch liegen. Wertet man die Abstandsgleicheit der Punkte *A´*, *B´*, *C´*, *D´* vom Mittelpunkt der Punkte *P* und *P** aus, so erhält man die Gleichung

$$2(S_A u + S_B v + S_C w)xyz + \sum_{zyklisch} ux(c^2 y^2 + b^2 z^2) = 0$$

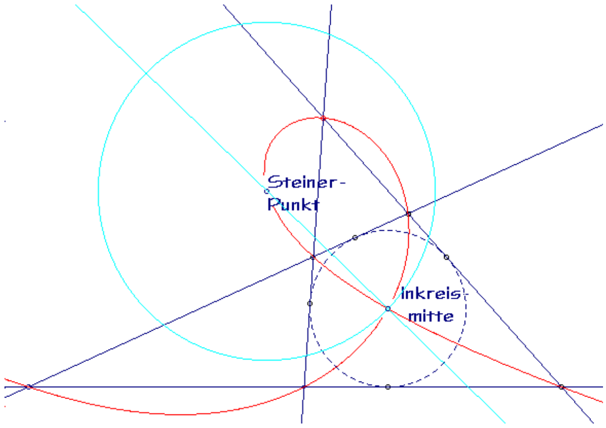
einer kubischen Kurve für die Punkte *P*, die – jedoch ohne Bezug zu der hier untersuchten Fragestellung – in [5] als Beispiel einer *„non-pivotal isogonal circular cubic"* näher beschrieben wird. Sie geht durch die Punkte *A*, *B*, *C*, *U*, *V*, *W* und *F*. Sie ist invariant gegenüber der isogonal-konjugierten Abbildung bzgl. jedes der vier Teildreiseite und auch gegenüber der Inversion, die *A* und *U*, *B* und *V*, *C* und *W* vertauscht. Die Bildpunkte von *P* bei diesen vier Abbildungen sind identisch. Diese Cubic ist die Ortskurve der Brennpunkte der „einbeschriebenen" Kegelschnitte der Geraden *a*, *b*, *c*, *d*. Die Mittelpunkte der Punkte *P* und *P** liegen auf der sogenannten Newton-Geraden, die die Mittelpunkte der Gegenpunktepaare *A* und *U*, *B* und *V*, *C* und *W* enthält. In [5] wird auch eine Konstruktionsmöglichkeit der Kurve angegeben.




Geometrisch interessant ist der Fall, dass *a*, *b*, *c*, *d* einen Berührkreis haben, das Viereck *UCAW* also ein Tangentenviereck ist. Dies ist der Fall, wenn der Punkt $Q(u:v:w)$ auf der Tripolaren $(-a+b+c : a-b+c : a+b-c)$ des Gergonne-Punktes liegt. Dann vereinfacht sich die Gleichung der Zirkularkurve zu

$$\sum_{zyklisch} ux(cy-bz)^2 = 0\,.$$

Diese Kurve hat einen Knotenpunkt in der Mitte des Berührkreises und ist invariant unter der Inversion mit Zentrum im Steiner-Punkt, die Gegenecken des Vierseits vertauscht und die Berührkreismitte als Fixpunkt hat. Sie kann als Strophoide angesprochen werden, da jede Inversion an einem Kreis um den Knotenpunkt eine rechtwinklige Hyperbel ergibt.




## Literatur

[1] E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. – VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

[2] H. Bubeck: P1059. – PM 5/45. Jg. 2003, S.244.

[3] R. Honsberger: Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. – The Mathematical Association of America, 1995.

[4] H.M. Cundy and C.F. Parry: Some Cubic Curves associated with a Triangle. – Journal of Geometry, Vol.53 (1995), 43.

[5] J. P. Ehrmann and B. Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. – http://perso. wanadoo.fr/bernard.gibert/.

[6] C. Kimberling: Encyclopedia of Triangle Centers.- http://www2.evansville.edu/ck6/encyclopedia.

[7] E.M. Schröder: Geometrie euklidischer Ebenen. – Schöningh Verlag Paderborn 1985, S. 81.

[8] J.-P. Ehrmann: Steiner´s Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52.

[9] R. Stärck und D. Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg. 2002, S. 19

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt. de
eckart_schmidt@t-online.de